DOI: 10.7256/1811-9018.2016.11.12465
При цитировании этой статьи сноска на doi обязательна

Тугаринова Л.А., Логвинов И.Г.

МОДЕЛЬ КЛАССИЧЕСКОЙ ДИЛЕММЫ ЗАКЛЮЧЁННОГО В ТЕОРИИ МАТРИЧНЫХ ИГР

Аннотация: *Автор рассматривает ситуации, в которых интересы отдельных сторон либо прямо противоположны, либо просто не совпадают. Автор рассматривает ситуации, в которых цели противоположны, а результат операции зависит от действий обеих сторон, как конфликтные и проводит математический анализ конфликтных ситуаций в рамках теории игр. Основная цель работы состоит в выработке рекомендаций по рациональному выбору действий конкурирующих сторон в условиях отсутствия информации о поведении другой стороны. Теория игр полезна, когда требуется определить наиболее важные и требующие учета факторы в ситуации принятия решений в условиях конкурентной борьбы. В правоохранительной, правоприменительной, правотворческой и другой юридической деятельности очень много ситуаций где может применяться теория игр. Одной из таких является классическая дилемма заключённого, на основе которой проводятся математические исследования автора в рамках теории игр. В данной работе описывается ситуация заключенного в ее классической формулировке. Согласно теории матричных игр, составляется её математическая модель. Данная математическая модель приводится к задаче линейного программирования, которая решается с использованием ПЭВМ. Представлен один из вариантов решения задачи в табличном процессоре Excel. Автор приходит к выводу, что любой процесс или ситуацию, в которой существует две стороны, интересы которых либо прямо противоположны, либо не совпадают можно смоделировать и получить ответ в виде рекомендаций по оптимальному выбору действий одной из сторон для получения более эффективного результата.*

Ключевые слова: *Вероятность выбора стратегии, классическая дилемма заключённого, конфликтная ситуация, матрица пары стратегий, минимизация предполагаемого срока, модель конфликтной ситуации, противостояние, рекомендации выбора действий, стратегия своего поведения, теория матричных игр.*

Abstract: *The author examines the situations, in which the interests of the sides are either directly oppose one another, or simply do not coincide. The author sees situations in which the goals are opposing, while the result of the operation depends on the actions of both sides, as conflicting, and provides a mathematical analysis of conflict situations within the framework of the game theory. The goal of this work is to make recommendations on rational choice of actions by the opposing sides in the conditions of absence of information on the behavior of the other side. The game theory is beneficial in cases when there is a need to determine factors of high importance that require consideration in situations of decision-making in the conditions of competition. The game theory can be applied in law enforcement, judicial, lawmaking and other legal fields. One of such is the classic prisoner's dilemma, upon which the author conducts the mathematical research within the framework of the game theory. The author concludes that any process or situation, which involves two sides with opposing interests or interests that do not align, can be modeled and receive an answer in form of recommendations for optimal choice of actions of one of the sides in order to receive a better outcome.*

Keywords: *Game theory, Behavior strategy, Recommendation for choice of action, Confrontation, Conflict model, Minimization of the proposed sentence , Matrix of the pair of strategies, Conflict situation, Classic prisoner's dilemma, Probability of choice of strategy .*

В реальных условиях нередко возникают ситуации, в которых интересы отдельных сторон либо прямо противоположны, либо просто не совпадают. Ситуации, в которых цели противоположны, а результат операции зависит от действий обеих сторон, называют конфликтными. Математический анализ конфликтных ситуаций находит своё выражение в теории игр, основная цель которой состоит в выработке рекомендаций по рациональному выбору действий конкурирующих сторон в условиях отсутствия информации о поведении другой стороны. Такие ситуации часто возникают в правоохранительной, правоприменительной, правотворческой и другой юридической деятельности. Рассмотрим

DOI: 10.7256/1811-9018.2016.11.12465
При цитировании этой статьи сноска на doi обязательна

математическую модель в теории игр на примере классической дилеммы заключённого.

Во всех судебных системах кара за совершение преступлений в составе группы намного тяжелее, чем за те же преступления, совершённые в одиночку. Классическая формулировка дилеммы заключённого гласит: Двое преступников, А и Б, попались примерно в одно и то же время на сходных преступлениях. Есть основания полагать, что они действовали по сговору, и следственные органы, изолировав их друг от друга, предлагает им одну и ту же сделку: если один свидетельствует против другого, а тот хранит молчание, то первый освобождается за помощь следствию, а второй получает максимальный срок лишения свободы (10 лет). Если оба молчат, их деяние проходит по более лёгкой статье, и они приговариваются к 6 месяцам. Если оба свидетельствуют друг против друга, они получают минимальный срок (по 2 года). Каждый заключённый выбирает, молчать ему или свидетельствовать против другого. Однако ни один из них точно не знает, что сделает другой. Что произойдёт в этом случае?

Матрица характеризующая срок в годах, который получает преступник при применении пары стратегий (A_i, B_j) имеет вид: $C = \begin{pmatrix} 0,5 & 10 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Какую стратегию лучше выбрать каждому из них, чтобы минимизировать предполагаемый срок заключения для себя, не заботясь о другой стороне.

Обозначим срок заключения за N.

Поставим каждой из стратегий соответствующую ей вероятность.

$A_1 - p_1$ $B_1 - q_1$
$A_2 - p_2$ $B_2 - q_2$ где $p_1 + p_2 = 1$, $q_1 + q_2 = 1$.

Тогда срок который получит преступник А, в зависимости от вероятности выбранной им стратегии (если В выбирает стратегию B_1), можно подсчитать по формуле: $0{,}5 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2$ Данный срок может быть больше или равен тому сроку, который дадут преступнику. То есть $0{,}5 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 \geq N$.

Схематично эту задачу можно представить в виде следующей таблицы[1]*:*

	Заключённый Б хранит молчание	Заключённый Б даёт показания
Заключённый А хранит молчание	Оба получают полгода.	А получает 10 лет, Б освобождается
Заключённый А даёт показания	А освобождается, Б получает 10 лет тюрьмы	Оба получают 2 года тюрьмы

Данную ситуацию можно рассмотреть как модель конфликтной ситуации и решить её, используя теорию матричных игр. В данной игре ни одна из сторон не может полностью контролировать положение дел из-за недостаточной информированностью об условиях поведения другой стороны. Не беря во внимание состав преступления, возьмём данные из классической формулировки дилеммы заключённого и сформулируем задачу следующим образом: Двое преступников, А и В, попались на одном преступлении. Изолированные друг от друга, они могут выбирать разные стратегии своего поведения:

Стратегия A_1 – заключённый А хранит молчание;
Стратегия A_2 – заключённый А даёт показания;
Стратегия B_1 – заключённый В хранит молчание;
Стратегия B_2 – заключённый В даёт показания.

Срок который получит преступник А, в зависимости от вероятности выбранной им стратегии (если В выбирает стратегию B_2), можно подсчитать по формуле: $10 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2$ Данный срок так же может быть больше или равен тому сроку, который дадут преступнику. То есть $10 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 \geq N$.

Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 0{,}5 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2 \geq N \\ 10 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 \geq N \end{cases} \quad (1)$$

Цель преступника А (или В) выбрать такую стратегию, чтобы минимизировать предполагаемый срок заключения для себя.

Приведём данную матричную игру к задаче линейного программирования[2], ответ которой можно

[1] Российская государственная библиотека / Центр информ. технологий РГБ. – М. : Рос. гос. б-ка, 1998. Режим доступа: http: / www.wikipedia.ru.

[2] *Шушерина О.А.* Экономико-математические методы и модели. Учебное пособие / О.А. Тугаринова, Т.Н.Логиновская, С.Ф. Яковлева. – Красноярск: СибГТУ, 2004.

DOI: 10.7256/1811-9018.2016.11.12465
При цитировании этой статьи сноска на doi обязательна
Право и политика 11 (203) • 2016

получить, используя расчёты на ЭВМ в табличном процессоре Excel.

Каждое из неравенств разделим на число $N > 0$ и введём новые переменные $y_i = \frac{p_i}{N}$ $i = \overline{1,2}$.

Тогда система неравенств (1) примет следующий вид:

$$\begin{cases} 0{,}5 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 \geq 1 \\ 10 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

Целевую функцию можно записать

$$\frac{1}{N} = \frac{p_1 + p_2}{N} = \frac{p_1}{N} + \frac{p_2}{N} = y_1 + y_2 = T \quad .$$

Минимизация N эквивалентна максимизации функции T.

Получим математическую модель:

Найти неотрицательные значения переменных y_1, y_2, которые удовлетворяют системе ограничений (2) и при которых целевая функция

$$T = y_1 + y_2 = \frac{1}{N} \to \max \text{ [2].}$$

Один из вариантов расположения данных задачи представлены на рисунках 1 и 2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			B_1	B_2					
2			q_1	q_2	Левая часть неравенств в системе ограничений	Правая часть неравенств в системе ограничений	y	Вероятность стратегии	Вероятность стратегии в процентах
3	A_1	p_1	0,5	10	=C3*G3+C4*G4	1	0	=G3*G7	=H3*100%
4	A_2	p_2	0	2	=D3*G3+D4*G4	1	0	=G4*G7	=H4*100%
5						Целевая функция T	=G3+G4		
6									
7						Срок , который получиь преступник	=1/G5		

Рисунок 1.
Данные математической модели в формульном виде

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			B_1	B_2					
2			q_1	q_2	Левая часть неравенств в системе ограничений	Правая часть неравенств в системе ограничений	y	Вероятность стратегии	Вероятность стратегии в процентах
3	A_1	p_1	0,5	10	0	1	0	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!
4	A_2	p_2	0	2	0	1	0	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!
5						Целевая функция T	0		
6									
7						Срок , который получиь преступник	#ДЕЛ/0!		

Рисунок 2.
Данные математической модели в численном виде

Решим данную задачу, используя команду «Поиск решения». Согласно поставленной модели, опции Окна «Поиска решений» должны быть заполнены, как показано на рисунке 3.

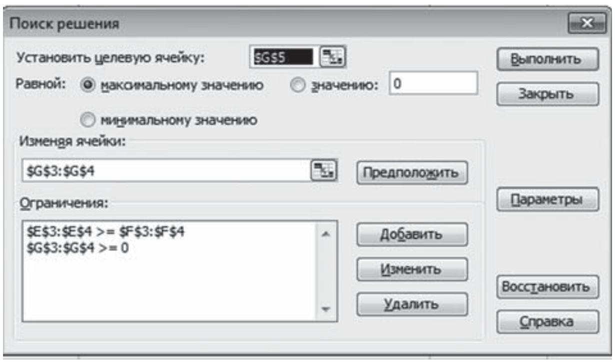

Рисунок 3.
Заполненное окно «Поиска решений»

Полученное решение (рисунок 4) свидетельствует о том, что чтобы получить минимальный срок в сложившейся ситуации, преступнику нужно с вероятностью 100 % выбрать стратегию A_1, то есть хранить молчание. При этом минимальный срок составит пол года.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			B_1	B_2					
2			q_1	q_2	Левая часть неравенств в системе ограничений	Правая часть неравенств в системе ограничений	y	Вероятность стратегии	Вероятность стратегии в процентах
3	A_1	p_1	0,5	10	1	1	2	1	100%
4	A_2	p_2	0	2	20	1	0	0	0%
5						Целевая функция T	2		
6									
7						Срок , который получиь преступник	0,5		

Рисунок 4.
Решение задачи

Теория конфликтных ситуаций разрабатывает рекомендации по наиболее рациональному образу действий каждого из участников, т.е. таких действий которые обеспечивали бы ему наилучший результат[3]. Рекомендации по наиболее рациональному образу действий одной из сторон можно получить в таких ситуациях, как:

1. Противостояние внутренних дел и преступного сообщества.
2. Конфликтная ситуация между защитой и обвинением. (Вопрос выбора стратегий для защиты самый актуальный)
3. Арбитражные споры.
4. Борьба между блоками избирателей за своих кандидатов.
5. Задача выбора тактического приёма для проведения контртеррористической операции.
6. В международных отношениях – отстаивание интересов своего государства.
7. В ситуациях, подобных «дилемме заключённого».

---

[3] Казанцев С.И. Информатика и математика для юристов – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010 – 463 с.

Теория игр полезна, когда требуется определить наиболее важные и требующие учета факторы в ситуации принятия решений в условиях конкурентной борьбы. Эта информация важна, поскольку позволяет учесть дополнительные переменные или факторы, имеющие возможность повлиять на ситуацию, и тем самым повысить эффективность решения.

Библиография:

1. Гермейер Ю.Б. Игры с непротивоположными интересами-М.: Наука, 2009.
2. Губко М.В., Новиков Д.А. Теория игр в управлении организационными процессами-М.: Наука, 2005-138 с.
3. Зенкевич Н.А., Ширяев В.Д. Игры со многими участниками-Саранск: Изд-во Мордовского ун-та, 2011.
4. Казанцев С.И. Информатика и математика для юристов-М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2010-463 с.
5. Крахин А.В. Математика для юристов. Учебное пособие – Москва: Флинта; МПСИ, 2009.
6. Попов А.М. Информатика и математика для юристов-М.: ЮНИТИ-Дана, 2012-391 с.
7. Российская государственная библиотека / Центр информ. технологий РГБ. – М. : Рос. гос. б-ка, 1998. Режим доступа: http: / www.wikipedia.ru.
8. Харшаньи Дж., Зельтен Р. Общая теория выбора равновесия в играх-СПб.: Экономическая школа, 2009.
9. Шолпо И.А. Исследование операций. Теория игр-Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2008.
10. Шушерина О.А. Экономико-математические методы и модели. Учебное пособие / О.А. Тугаринова, Т.Н.Логиновская, С.Ф. Яковлева. – Красноярск: СибГТУ, 2004.
11. Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г. Постановка задачи оптимизации распределённых вычислительных систем // Программные системы и вычислительные методы. – 2013. – 4. – С. 370-375. DOI: 10.7256/2305-6061.2013.4.10548. 11. Ткаченко О.В. Эмоциональное состояние детей в игре. // NB: Психология и психотехника. — 2013. – № 7. – С.1-18. DOI: 10.7256/2306-0425.2013.7.10217. URL: http://e-notabene.ru/psp/article_10217.html
12. Роженцов В.В., Афоньшин В.Е. Технология технико-тактической подготовки в игровых видах спорта // NB: Кибернетика и программирование. — 2014. – № 3. – С.103-109. DOI: 10.7256/2306-4196.2014.3.12048. URL: http://e-notabene.ru/kp/article_12048.html
13. Артем Гуларян. Игра в кости: страсть длиною в пять тысячелетий // Исторический журнал. – 2013. – № 6. – С. 104-107.
14. Наталья Митина. Домино: «игра заграничных кофеин» // Исторический журнал. – 2011. – № 9. – С. 104-107
15. Нарциссова С.Ю., Носков Ю.М., Крупенников Н.А., Матвиенко С.В., Кондратьев В.С. Мышление как фактор развития личности: моделирование когнитивно-стилевых особенностей аргументации // Национальная безопасность / nota bene. – 2013. – 5. – С. 124 – 148. DOI: 10.7256/2073-8560.2013.5.9871.
16. Гришенцев А.Ю., Коробейников А.Г. Постановка задачи оптимизации распределённых вычислительных систем // Программные системы и вычислительные методы. – 2013. – 4. – С. 370 – 375. DOI: 10.7256/2305-6061.2013.4.10548.

References (transliterated):

1. Germeier Yu.B. Igry s neprotivopolozhnymi interesami-M.: Nauka, 2009.
2. Gubko M.V., Novikov D.A. Teoriya igr v upravlenii organizatsionnymi protsessami-M.: Nauka, 2005-138 s.
3. Zenkevich N.A., Shiryaev V.D. Igry so mnogimi uchastnikami-Saransk: Izd-vo Mordovskogo un-ta, 2011.
4. Kazantsev S.I. Informatika i matematika dlya yuristov-M.: YuNITI-DANA, 2010-463 s.
5. Krakhin A.V. Matematika dlya yuristov. Uchebnoe posobie – Moskva: Flinta; MPSI, 2009.
6. Popov A.M. Informatika i matematika dlya yuristov-M.: YuNITI-Dana, 2012-391 s.
7. Kharshan'i Dzh., Zel'ten R. Obshchaya teoriya vybora ravnovesiya v igrakh-SPb.: Ekonomicheskaya shkola, 2009.
8. Sholpo I.A. Issledovanie operatsii. Teoriya igr-Saratov: Izd-vo Sarat. un-ta, 2008.
9. Shusherina O.A. Ekonomiko-matematicheskie metody i modeli. Uchebnoe posobie / O.A. Tugarinova, T.N.Loginovskaya, S.F. Yakovleva. – Krasnoyarsk: SibGTU, 2004.
10. Grishentsev A.Yu., Korobeinikov A.G. Postanovka zadachi optimizatsii raspredelennykh vychislitel'nykh sistem // Programmnye sistemy i vychislitel'nye metody. – 2013. – 4. – C. 370-375. DOI: 10.7256/2305-6061.2013.4.10548. 11. Tkachenko O.V. Emotsional'noe sostoyanie detei v igre. // NB: Psikhologiya i psikhotekhnika. — 2013. – № 7. – S.1-18. DOI: 10.7256/2306-0425.2013.7.10217. URL: http://e-notabene.ru/psp/article_10217.html
11. Rozhentsov V.V., Afon'shin V.E. Tekhnologiya tekhniko-takticheskoi podgotovki v igrovykh vidakh sporta // NB: Kibernetika i programmirovanie. — 2014. – № 3. – S.103-109. DOI: 10.7256/2306-4196.2014.3.12048. URL: http://e-notabene.ru/kp/article_12048.html
12. Artem Gularyan. Igra v kosti: strast' dlinoyu v pyat' tysyacheletii // Istoricheskii zhurnal. – 2013. – № 6. – S. 104-107.
13. Natal'ya Mitina. Domino: «igra zagranichnykh kofein» // Istoricheskii zhurnal. – 2011. – № 9. – S. 104-107
14. Nartsissova S.Yu., Noskov Yu.M., Krupennikov N.A., Matvienko S.V., Kondrat'ev V.S. Myshlenie kak faktor razvitiya lichnosti: modelirovanie kognitivno-stilevykh osobennostei argumentatsii // Natsional'naya bezopasnost' / nota bene. – 2013. – 5. – C. 124 – 148. DOI: 10.7256/2073-8560.2013.5.9871.
15. Grishentsev A.Yu., Korobeinikov A.G. Postanovka zadachi optimizatsii raspredelennykh vychislitel'nykh sistem // Programmnye sistemy i vychislitel'nye metody. – 2013. – 4. – C. 370 – 375. DOI: 10.7256/2305-6061.2013.4.10548.